Tema 3 -Operaciones Simples en Régimen de Capitalización

Interés

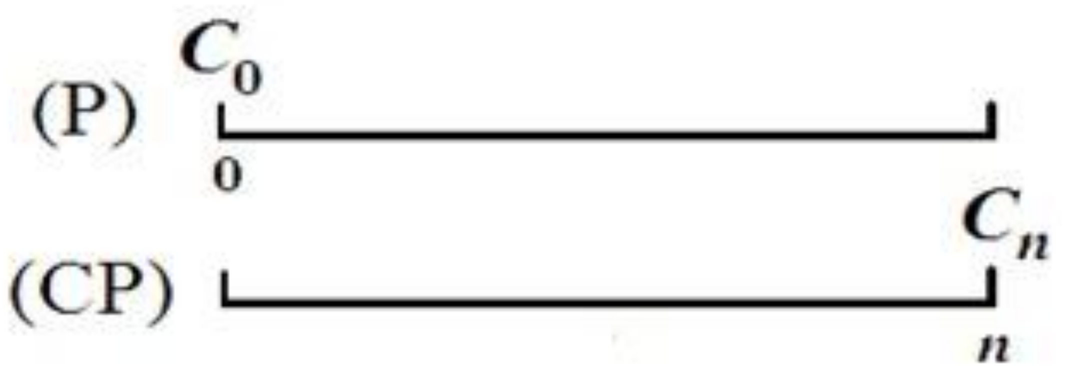
Estudiaremos el valor futuro de una inversión, es decir, la cantidad a la que crecerá una inversión después de añadirle los intereses.

El interés es la recompensa que recibe el prestamista porque:

-No puede disponer de ese capital durante la vida del préstamo.

-Está corriendo el riesgo de que el prestatario no le devuelva el dinero.

Interés



Interés: $I_{0,n}=C_n-C_0$

Régimen capitalización simple

En un régimen de capitalización simple, la cantidad de interés es proporcional al capital invertido (C_0) y a la duración de la operación (n).

$$I_{0,n} = C_n - C_0 = C_0 \cdot i \cdot n$$

Régimen capitalización simple

La expresión $\mathbf{C_n=C_0\cdot(1+i\cdot n)}$ es conocida como Ley financiera de capitalización simple.

El coeficiente de proporcionalidad i es denominado tanto de interés simple de la operación, y es el interés producido por cada unidad monetaria invertida y por unidad de tiempo.

$$\frac{I_{0,n}}{C_{0\cdot n}} = \frac{C_0\cdot i\cdot n}{C_0\cdot n} = i$$

Régimen capitalización simple

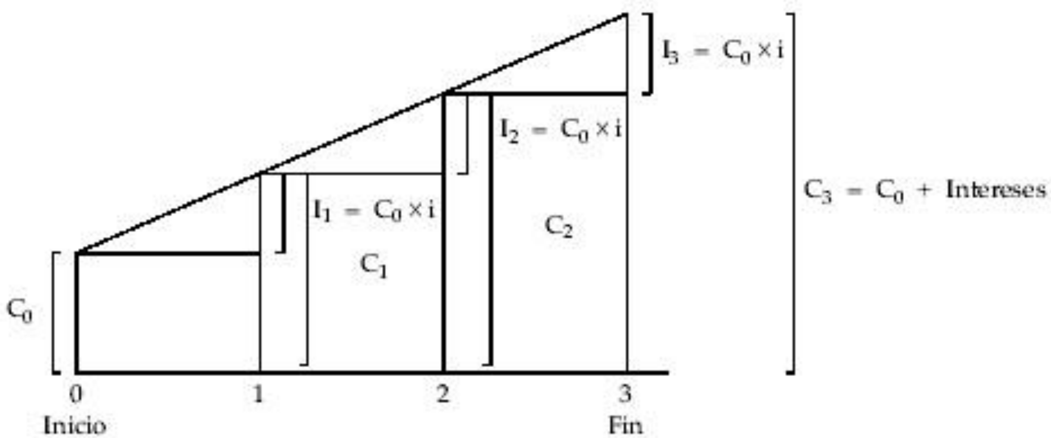
En la práctica, se suele operar con tantos de interés simple anuales, con lo que su aplicación supondrá tomar como unidad de tiempo o periodo de capitalización el año.

Al realizar un análisis por periodos, el montante obtenido al final de cada periodo puede expresarse como:

$$\begin{cases} C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \\ C_2 = C_1 + C_0 \cdot i \\ \quad \ldots \\ C_n = C_{n-1} + C_0 \cdot i \end{cases}$$

Régimen capitalización simple

Los intereses producidos en cada periodo son constantes e iguales a $C_0 \cdot i$, lo que supone que la gráfica de la ley de capitalización simple respecto al tiempo sea una recta.



Régimen capitalización simple

En la práctica: el tanto es anual y la duración en días.

<u>Año comercial</u>: 360 días (12 meses de 30 días)

La fracción de año aparecerá expresada como t=k/360, siendo k el número de días que permanece invertido el capital inicial, e i el tanto anual aplicado.

La ley financiera, en este caso, es $C_t = C_0 \cdot (1 + i \cdot t) = C_0 \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{360})$

La expresión de los intereses generados durante la operación puede escribirse como: $I_{0,t} = C_0 \cdot i \cdot t = C_0 \cdot i \cdot \frac{k}{360}$

Régimen capitalización simple

Año civil: 365 días

La fracción de año aparecerá expresada como t=k/365, siendo k el número de días que permanece invertido el capital inicial, e i el tanto anual aplicado.

La ley financiera, en este caso, es $C_t = C_0 \cdot (1 + i \cdot t) = C_0 \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{365})$

La expresión de los intereses generados durante la operación puede escribirse como: $I_{0,t} = C_0 \cdot i \cdot t = C_0 \cdot i \cdot \frac{k}{365}$

Ejercicio

Determinado individuo se ve en la necesidad de hacer frente a un pago de 500€ dentro de 265 días. Ante esta situación, un amigo le ofrece la posibilidad de prestarle una cantidad de 490€ a día de hoy. Determinar si, con un tipo de interés vigente en el mercado del 2.50%, el individuo será capaz de hacer frente al pago únicamente con la ayuda de su amigo.

Régimen capitalización compuesta

La ley financiera de capitalización compuesta se utiliza en operaciones a largo plazo, operaciones de mercados de capitales con duración que excede de los limites marcados para las operaciones de corto plazo.

El capital final se obtiene a partir de la denominada Ley financiera de capitalización compuesta, $\mathbf{C_n=C_0\cdot(1+i)^n}$

Régimen capitalización compuesta

El parámetro i es el tanto de interés compuesto de la operación reflejando los intereses que produce al final de cada periodo cada unidad monetaria. Significado que se corresponde con el de rédito y tanto de interés efectivo en cada periodo de la operación.

$$I_{s-1,s} = C_s - C_{s-1} \quad \text{(interés en el intervalo (s-1,s))}$$

Régimen capitalización compuesta

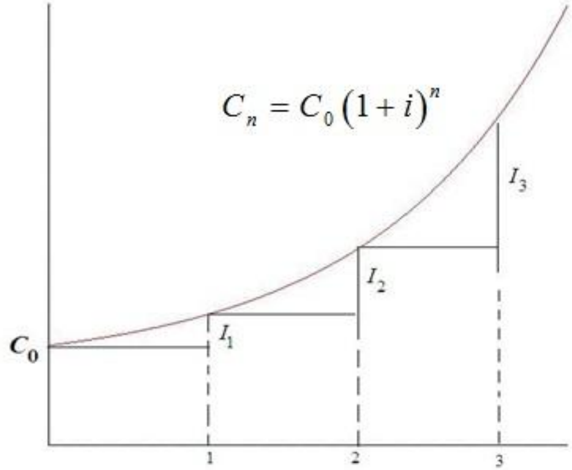
$$\frac{I_{s-1,s}}{C_{s-1}}=\frac{C_s-C_{s-1}}{C_{s-1}}=\frac{C_0\cdot(1+i)^s-C_0\cdot(1+i)^{s-1}}{C_0\cdot(1+i)^{s-1}}=i$$

Al realizar un análisis por periodos, el montante obtenido al final de cada periodo puede expresarse como:

$$\begin{cases} C_1=C_0\cdot(1+i)\Rightarrow i=\dfrac{C_1-C_0}{C_0} \\ C_2=C_1\cdot(1+i)=C_0\cdot(1+i)^2\Rightarrow i=\dfrac{C_2-C_1}{C_1} \\ \quad\ldots \\ C_n=C_{n-1}\cdot(1+i)=C_0\cdot(1+i)^n\Rightarrow i=\dfrac{C_n-C_{n-1}}{C_{n-1}} \end{cases}$$

Régimen capitalización compuesta

La característica básica de la ley de capitalización compuesta que rige en los mercados financieros es que los intereses de cada periodo se añaden al capital inicial capitalizándose conjuntamente en periodos sucesivos.



Régimen capitalización compuesta

Comparando los intereses en dos periodos consecutivos:

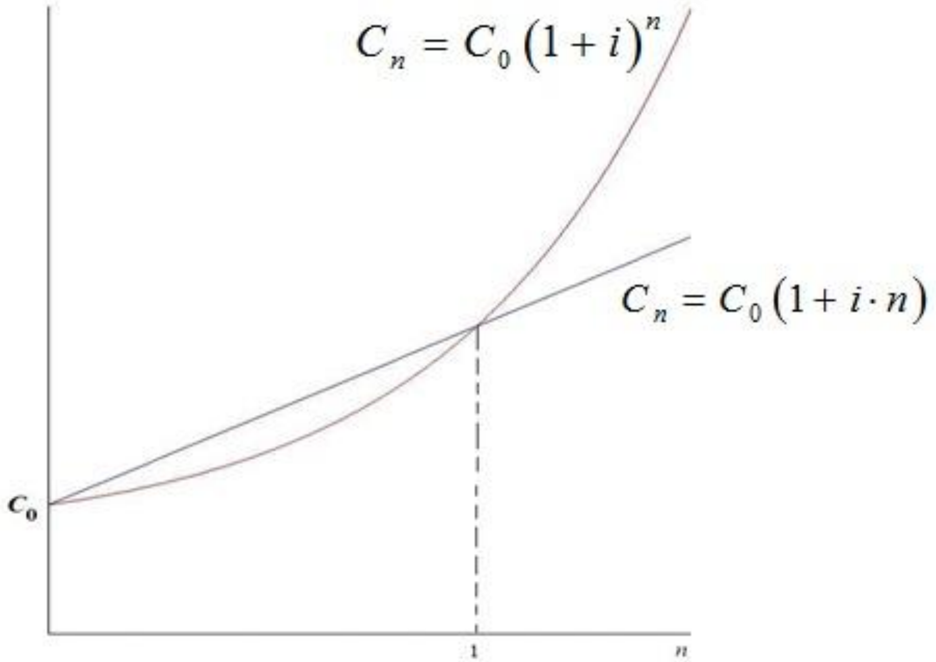
$$\left.\begin{array}{l} C_{n+1} = C_n \cdot (1+i) \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1+i) \end{array}\right\} I_{n+1} = C_{n+1} - C_n = C_n \cdot (1+i) - C_{n-1} \cdot (1+i)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = I_n \cdot (1+i)$$

Los intereses de cada periodo crecen en progresión geométrica. Los intereses acumulados sí contribuyen al aumento del montante.

Régimen capitalización simple vs compuesta

Realizando una comparación gráfica de las leyes de capitalización simple y compuesta obtenemos:



Ejercicio

La empresa X tiene unas necesidades de financiación de 150.000€, para lo cual está considerando un préstamo al 5% anual de intereses a devolver en 6 años, devolviéndose la totalidad y los intereses al finalizar dicho periodo. Se desea conocer:

a) El montante final a devolver después de 6 años.

b) Deuda pendiente al finalizar el tercer año.

c) Intereses al final del quinto año.

Características comerciales en operaciones de capitalización

Dos tantos son equivalentes cuando, aplicados sobre el mismo capital inicial durante el mismo tiempo, dan lugar al mismo capital final.

El periodo de capitalización se puede dividir en periodos o en subperiodos. El fraccionamiento en subperiodos se denota por m.

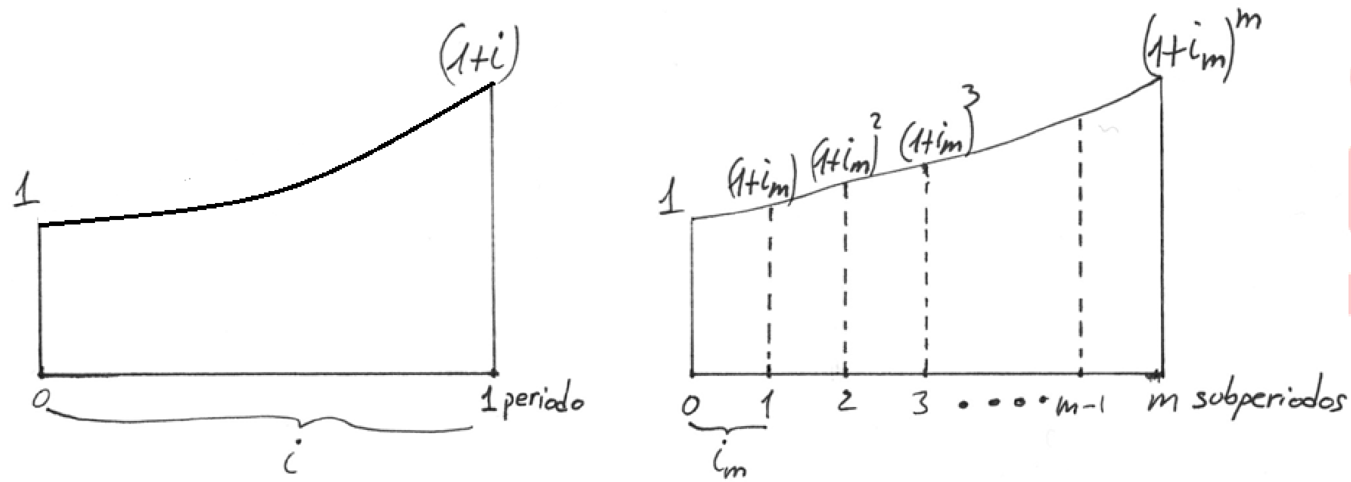
Tantos de interés simple equivalentes

En capitalización simple los tantos equivalentes se relacionan de forma proporcional. Un 1% mensual equivale a un 12% anual.

La expresión que los relaciona es:

$$i = m \cdot i_m \quad \Rightarrow \quad i_m = \frac{i}{m}$$

Tantos de interés compuesto equivalentes



Utilizando el tanto i relativo al periodo, obtendremos un montante igual a (1+i)

Utilizando el tanto i_m relativo al subperiodo, obtendremos un montante igual a $(1+i_m)^m$

Tantos de interés compuesto equivalentes

El tanto i y el tanto i_m serán tantos equivalentes si, aplicados sobre la misma cuantía y durante el mismo tiempo, dan lugar al mismo capital final.

Igualando $(1+i)=(1+i_m)^m$ obtenemos, despejando que:

$$i_m=(1+i)^{1/m}-1 \qquad i=(1+i_m)^m-1$$

Capitalización fraccionada

En la práctica habitual de los mercados financieros, los tipos de interés suelen estar referidos a periodos anuales. Es decir, cuando una entidad financiera ofrece un producto financiero de inversión (o de financiación) expresa la rentabilidad (o el coste) mediante un tipo de interés anual.

Capitalización fraccionada

A pesar de esto, es frecuente que en los instrumentos de inversión o de financiación los intereses se devenguen en periodos inferiores al año, tales como el semestre, el trimestre o el mes. A este fenómeno se le denomina fraccionamiento.

Capitalización fraccionada

Capitalización fraccionada: La acumulación de intereses se efectúa por fracciones de año, considerando el año como unidad temporal.

Frecuencia de capitalización: Número de veces que los intereses se acumulan al capital para producir nuevos intereses dentro del año.

Capitalización fraccionada

Tanto de interés nominal j_m: Tanto de interés anual que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización (m) por el tanto efectivo del subperiodo (i_m), esto es: $j_m = m \cdot i_m$ $\qquad i_m = \dfrac{j_m}{m}$

Aunque j_m e i son ambos tantos anuales, su significado es claramente diferente. Para un valor de i_m se tendrá, $(1+i_m)^m - 1 = i \neq j_m = m \cdot i_m$

Tanto interés nominal vs efectivo

¿Qué señala Banco de España al respecto?

Cuando el periodo de tiempo previsto para el cálculo y liquidación de intereses coincide con la forma de expresión del tipo de interés se está utilizando un tipo de interés nominal.

Tanto interés nominal vs efectivo

Ejemplos:

- 4% anual, en una operación de 1.000€ de principal con cálculo y liquidación anual de intereses: los intereses a pagar/percibir cada año ascienden a 40€.

- 2% semestral en una operación de 1.000€con cálculo y liquidación semestral de intereses: los intereses a pagar/percibir cada semestre ascienden a 20 €.

Tanto interés nominal vs efectivo

El problema es que no siempre coincide el periodo de tiempo del cálculo con el de la liquidación de intereses. Eso provoca que no se pueda comparar bien el coste (o el beneficio) de un determinado producto financiero.

Para que la comparación sea homogénea, debe conocerse cuál es el tipo de interés efectivo de la operación, que es aquel que iguala los pagos y cobros de principal e intereses de un producto teniendo en cuenta el momento en que se producen.

Tanto interés nominal vs efectivo

Bajo la hipótesis del tipo de interés compuesto se construye el tipo de interés efectivo. Así, por ejemplo, un préstamo con un tipo de interés nominal anual del 4%, cuyos intereses se pagan cada semestre, es un préstamo con un tipo de interés efectivo del 4,04%.

Ejercicio

Si se invierte una cantidad determinada de euros durante 1 año en un depósito a plazo bajo el compromiso por parte de la entidad financiera de aplicar un tipo de interés nominal anual del 2% con devengo trimestral de intereses. ¿Qué tanto de interés se habrá obtenido de modo efectivo al final del año?

Ejercicio

1) Utilizando como frecuencia de fraccionamiento m=1,2,3,4,6 y 12, obtener el tanto efectivo anual correspondiente a un nominal del 2%.

2) Utilizando como frecuencia de fraccionamiento m=1,2,3,4,6, y 12, obtener el tanto nominal anual correspondiente a un efectivo del 3%.